COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Sujet commun ENS : ULM et LYON)

Le but du problème est de démontrer un certain nombre de propriétés profondes des fonctions complexes qui peuvent s'écrire au voisinage de chaque point comme somme d'une série entière. Ces fonctions sont appelées holomorphes. En particulier, on montre qu'une telle fonction définie sur tout $\mathbb{C}$ prend toutes les valeurs sauf au plus une. Ce résultat, le petit théorème de Picard, et une de ses généralisations, le grand théorème de Picard, sont l'objet des deux premières parties.

Les parties II et III sont indépendantes.

Notations

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, que l'on pourra librement identifier au plan réel. Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $|z| = \sqrt{(x^2 + y^2)}$. Ceci définit la norme usuelle de $\mathbb{C}$. $D(a,r)$ désigne le disque ouvert de centre a et de rayon r dans $\mathbb{C}$, $\overline{D}(a,r)$ le disque fermé. Pour abréger, on pose $D_r = D(0,r)$, et $D = D_1 = D(0,1)$.

Dans tout le problème, U désignera un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application. On dira que f est holomorphe dans U si au voisinage de tout point $z_0 \in U$ on peut écrire $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$, avec $a_j \in \mathbb{C}$ (la série ayant un rayon de convergence non nul). En d'autres termes, f est holomorphe si et seulement si

$$\forall z_0 \in U,\ \exists (a_j)_{j \geq 0} \text{ et } \epsilon > 0 \text{ tel que } \forall z \in D(z_0, \epsilon),\quad f(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j (z - z_0)^j.$$

On pose alors $f^{(k)}(z_0) = k!\, a_k$, a_k étant défini par le développement en série ci-dessus.

Il est entendu que lorsqu'on pose l'égalité d'un nombre et d'une série, la série en question est convergente.

On notera log la fonction logarithme néperien de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Partie I

1. Montrer qu'une fonction holomorphe est C^∞ comme fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, et que sa différentielle en z_0 est l'application linéaire du plan (identifié à $\mathbb{C}$) dans lui-même : $h \mapsto a_1 \cdot h = f'(z_0) \cdot h$.

Montrer que la somme et le produit de deux fonctions holomorphes sur U sont encore des fonctions holomorphes sur U.

On admettra dans la suite que si f est holomorphe sur U, et g est holomorphe sur un ouvert contenant $f(U)$ alors $g \circ f$ est holomorphe sur U.

2. Montrer que si f ne s'annule pas sur U, $1/f$ est holomorphe sur U et qu'une fraction rationnelle est holomorphe en dehors des zéros de son dénominateur.

Soit m un entier strictement positif. Montrer que pour $r < |a|$, et b nombre complexe tel que $b^m = a$, il existe une unique fonction holomorphe dans $D(a,r)$, notée $r_{m,b}$ telle que $(r_{m,b}(z))^m = z$ et $r_{m,b}(a) = b$.

3. Soit $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$. On suppose que la série a un rayon de convergence égal à r. Montrer que f est holomorphe dans le disque $D(0,r)$.

4. Montrer que si f est holomorphe non constante dans U et si $f(z_0) = w_0$ alors $f(U)$ contient un voisinage de w_0. On pourra se ramener au cas $w_0 = z_0 = 0$ puis écrire $f(z) = z^m g(z)$ avec $g(0) \neq 0$, avec m entier strictement positif. Ecrire alors, au voisinage de $z = 0$, $g(z) = h(z)^m$ avec h holomorphe et montrer que l'image de $z \mapsto zh(z)$ est ouverte. On montrera que l'image d'un voisinage de zéro par $z \mapsto z^m$ est un voisinage de zéro pour conclure.

5. Si f est holomorphe non constante dans U, montrer que pour $z_0 \in U$, on a $|f(z_0)| < sup_{z \in U} |f(z)|$, c'est-à-dire que $|f|$ ne peut atteindre sa borne supérieure en un point de U .

6. (Lemme de Schwarz-Pick). Soit $f : D \to D$, holomorphe

a. Supposons que $f(0) = 0$, montrer alors que $|f'(0)| \leq 1$. On considèrera la fonction $g(z) = f(z)/z$, $z \neq 0$, $g(0) = f'(0)$ (on justifiera le domaine où g est holomorphe).

b. En utilisant les fonctions $\phi(z) = (z + z_1)/(1 + z\overline{z}_1)$ et $\psi(w) = (w - w_1)/(1 - w\overline{w}_1)$, montrer que si $f(z_1) = w_1$ on a $|f'(z_1)| \leq (1 - |w_1|^2)/(1 - |z_1|^2)$.

7. Soit f holomorphe dans $D(0,r)$ telle qu'il existe une constante M telle que $|f(z)| \leq M$ sur $D(0,r)$. Montrer que si $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ au voisinage de 0, on a pour tout k, $|a_k| \leq Mr^{-k}$. On pourra traiter d'abord le cas $k = 1$, puis considérer le développement en série de $\sum_{j=1}^{k} f(\omega^j z)$ où $\omega = exp(2i\pi/k)$, en utilisant l'identité :

$$\sum_{j=1}^{k} \omega^{lj} = k \quad \text{si } k \text{ divise } l \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{k} \omega^{lj} = 0 \quad \text{sinon .}$$

En déduire que si f est holomorphe sur un ouvert contenant $D(z_0, R)$, le développement en série de f au voisinage de z_0 a un rayon de convergence au moins égal à R .

8. Soit $f_p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,p} z^k$ une suite de fonctions holomorphes sur $D(z_0, R)$ vérifiant : pour tout $r < R$ il existe une constante M_r telle que l'on ait $|f_p| \leq M_r$ sur $D(z_0, r)$.

Montrer que (f_p) converge uniformément sur $D(z_0, r)$ pour tout $r < R$ si et seulement si la suite $a_{k,p}$ converge pour tout k vers $a_{k,\infty}$ tel que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k,\infty} z^k$ ait pour rayon de convergence au moins R. Montrer que dans ce cas $f = lim f_p$ a pour développement en série $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k,\infty} z^k$.

Indications : On pourra considérer une fonction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie comme suit : $\phi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est telle que la suite $a_{0,\phi_0(p)}$ converge, sa limite étant notée $a_{0,\infty}$. Puis $\phi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est choisie telle que $a_{1,\phi_0(\phi_1(p))}$ converge, sa limite étant notée $a_{1,\infty}$, etc... . On pose alors $\psi(p) = \phi_0 \circ \phi_1 \circ \ldots \phi_{p-1} \circ \phi_p(p)$ et on montrera que la suite $a_{k,\psi(k)}$ converge pour tout k.

9. Soit maintenant (f_p) une suite de fonctions holomorphes sur U. Montrer que si pour chaque disque $D(z_0, r)$ dont l'adhérence est contenue dans U, il existe une constante M_r telle que l'on ait $|f_p| \leq M_r$, alors il existe une sous-suite de $(f_p)_{p \geq 1}$ qui converge uniformément sur $D(z_0, r)$. En déduire qu'étant donné un sous-ensemble compact de U, il existe une sous-suite de f_p qui converge uniformément sur ce compact.

Montrer que si $(f_p)_{p \geq 1}$ est une suite de fonctions holomorphes sur U telle que pour tout disque $D(z_0, r)$ dont l'adhérence est contenue dans U, on ait $|f_p'| \leq M_r$ sur $D(z_0, r)$, alors étant donné un sous-ensemble compact K de U, il existe une sous-suite de (f_p), notée (g_p) telle que :

- soit (g_p) converge uniformément sur K ,
- soit $(1/g_p)$ converge uniformément vers 0 sur K.

Dans la suite on dira que la suite $(f_p)_{p \geq 1}$ est *normale* sur U.

Partie II

Dans la suite on appellera "métrique" sur U, une fonction C^2 strictement positive sur U. Sur D on note P la métrique définie par $P(z) = \frac{1}{(1-|z|^2)}$.

Soit g une métrique, et f holomorphe, on pose $f^*g(z) = g(f(z))|f'(z)|$.

1. Soit $f : D \to D$ une fonction holomorphe. Montrer que $f^*P \leq P$.

Dans les questions 2 et 3, u désignera une fonction C^2 sur U à valeurs réelles.

2. On pose $\Delta u = \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2$. Montrer que si f est holomorphe sur D, alors $u = Re(f)$ vérifie $\Delta u = 0$, et qu'il en est de même pour $w = log(|f|)$ pourvu que f ne s'annule pas.

3. On rappelle que l'expression de Δ en coordonnées polaires est donnée par $\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$. En d'autres termes, si on pose $v(r,\theta) = u(r\exp(i\theta))$, on a

$$\Delta u(r\exp(i\theta)) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r,\theta)$$

Montrer que si $\Delta u > 0$ au voisinage d'un point a, $m(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + r\exp(i\theta))d\theta$ satisfait une inéquation différentielle que l'on explicitera. En déduire que $m'(r) > 0$ pour r petit. En déduire que si $\Delta u \geq 0$ sur D et u n'est pas constante, u ne peut atteindre son maximum sur D.

Dans la suite, on note κ_g la fonction $(\Delta \log(g))/g^2$.

4. Montrer que $\kappa_P = 4$. On suppose que $\kappa_g \geq 4$. Soit $D' = D(0,R)$ avec $R > 1$. Montrer alors que si $f : D' \to U$ est holomorphe et bornée, on a $f^*g \leq P$. On pourra calculer $\Delta(\log v)$ pour $v = f^*g/P$ en ayant soin de ne pas oublier que f^*g peut s'annuler. On pourra d'abord montrer que si f est holomorphe, et si h est une fonction C^2 arbitraire, on a $\Delta(h \circ f)(z) = \Delta h(f(z))|f'(z)|^2$.

5. On suppose que $f : D(0,r) \to U$ est holomorphe, et qu'il existe une constante B strictement positive telle que $\kappa_g \geq B$. Montrer qu'on a $f^*g \leq P_r/\sqrt{B}$, où $P_r(z) = 2r/(r^2 - |z|^2)$.

6. Montrer sous les hypothèses de la question précédente qu'il n'existe pas d'application holomorphe non constante de $\mathbb{C}$ dans U. En déduire en particulier qu'une application holomorphe bornée définie sur $\mathbb{C}$ est constante.

7. Montrer pour la métrique $g(z) = \left[\frac{(1+|z|^{1/3})^{1/6}}{|z|^{5/6}}\right]\left[\frac{(1+|z-1|^{1/3})^{1/6}}{|z-1|^{5/6}}\right]$ définie sur $\mathbb{C}-\{0,1\}$ que κ_g est minorée par une constante strictement positive. En déduire qu'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ prend toutes les valeurs sauf au plus une (Petit théorème de Picard). L'énoncé précédent reste-t-il vrai si l'on remplace "toutes les valeurs sauf au plus une" par "toutes les valeurs"?

8. Montrer que s'il existe sur U une métrique g telle que κ_g est minorée par une constante strictement positive, alors toute suite de fonctions holomorphes sur D à valeurs dans U est normale.

9. (Grand théorème de Picard). Pour cette question on pourra admettre qu'une fonction bornée sur $D(0,r)$ et holomorphe sur $D(0,r)-\{0\}$ est nécessairement holomorphe sur $D(0,r)$ tout entier.

En considérant la suite $f(z/n)$, montrer que si f est holomorphe dans $D(0,r)-\{0\}$, on a pour tout ϵ dans $]0,r[$:

(i) soit le complémentaire de $f(D(0,\epsilon)-\{0\})$ contient au plus un point,

(ii) soit il existe k tel que $z^k f(z)$ reste bornée dans $D(0,\epsilon)-\{0\}$.

Partie III

Dans toute cette partie $\mathbb{C}^2$ est muni de la norme $||(z_1,z_2)|| = (|z_1|^2+|z_2|^2)^{1/2}$. On appelle boule (unité) l'ensemble $B = \{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2\ ,\ ||(z_1,z_2)||\leq 1\}$, et bidisque l'ensemble $\Omega = D\times D = \{(z_1,z_2)\ ,\ |z_1|\leq 1 \text{ et } |z_2|\leq 1\}$.

On dira qu'une fonction f d'un ouvert $W\subset\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ est holomorphe, si pour chaque couple (ϕ_1,ϕ_2) de fonctions holomorphes définies sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans W, la fonction $z\mapsto f((\phi_1(z),\phi_2(z)))$ est holomorphe sur U.

Si f est une application de $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$, on note respectivement f_1 et f_2 les premières et secondes composantes de f.

1. Montrer que si f est holomorphe de W dans $\mathbb{C}$ elle est différentiable, et sa différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire. On la note $Df(z_1,z_2) : (h_1,h_2)\mapsto \frac{\partial f}{\partial z_1}(z_1,z_2)\cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2}(z_1,z_2)\cdot h_2$. On pose aussi $||Df(z_1,z_2)|| = (|\frac{\partial f}{\partial z_1}(z_1,z_2)|^2 + |\frac{\partial f}{\partial z_2}(z_1,z_2)|^2)^{1/2}$.

Soit $\xi\in\mathbb{C}^2$ et $Z_0\in W$; on note $H(D,W,Z_0)$ l'ensemble des applications $f : D\to W$ telles que $f=(f_1,f_2)$, avec f_1 et f_2 holomorphes et $f(0)=Z_0$; on pose

$$G_W(Z_0,\xi) = \inf\{|\lambda|^{-1}\ ,\ f\in H(D,W,Z_0) \text{ et } Df(0)=\lambda\xi\ ,\ \lambda\in\mathbb{C}\}\ .$$

2. Montrer que si W est borné, $G_W(Z_0,\xi)$ est à valeurs dans R_+^* pour $\xi\neq 0$.

3. Montrer que si $f : W_1\to W_2$ est holomorphe, on a

$$G_{W_1}(Z_0,\xi)\geq G_{W_2}(f(Z_0),Df(Z_0)\xi)\ .$$

4. Montrer que sur la boule unité

$$G_B(Z_0,\xi) = \frac{1}{(1-||Z_0||^2)}||\xi||\ ,$$

et que $G_{\mathbb{C}^2}=0$.

On dit que f est biholomorphe si f a une réciproque, qui est aussi holomorphe, et que deux ouverts de $\mathbb{C}^2$, W_1 et W_2, sont biholomorphiquement équivalents si et seulement s'il existe une application biholomorphe de W_1 sur W_2. On se propose de montrer que la boule B et le bidisque Ω ne sont pas biholomorphiquement équivalents.

5. Montrer qu'il n'existe pas d'automorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathbb{C}^2$, tel que l'image de B par cet automorphisme soit Ω.

6. On pose $i(W,Z_0) = \{\xi\mid G_W(Z_0,\xi)\leq 1\}$. Montrer que $i(B,0)=B$ et $i(\Omega,0)=\Omega$.

7. Montrer que s'il existe une application biholomorphe de B dans Ω, il existe une telle application f, vérifiant de plus $f(0,0)=(0,0)$ (on pourra utiliser les transformations définies en I.6.b). En déduire que $Df(0)$ envoie B sur Ω. Conclure.